ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 465, № 6, с. 643–646

МАТЕМАТИКА

УДК 330.115

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ ИНФЛЯЦИИ И НЕСТАБИЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

© 2015 г. Иностранный член РАН А. А. Акаев, А. И. Сарыгулов, В. Н. Соколов

Поступило 14.08.2015 г.

В работе впервые предложена функция спроса, основанная на законе распределения типа Парето и построена замкнутая математическая модель, адекватно описывающая краткосрочную экономическую динамику в условиях высокой инфляции и нестабильного развития. Классические модели хорошо описывают лишь два крайних случая: нормальной (ползучей) инфляции и гиперинфляции. Разработанная в данной работе модель весьма успешно применяется к анализу и краткосрочному прогнозированию российской экономики, находящейся в условиях высокой инфляции и нестабильного развития, которые являются промежуточными между двумя вышеуказанными крайними случаями.

DOI: 10.7868/S0869565215360037

В настоящее время россиян больше всего тревожат рост инфляции и спад в экономике, ведущие к снижению реального уровня жизни. Инфляция по итогам 2014 г. впервые после кризисного 2009 г. вновь стала двузначной (11.4%), а экономический рост снизился с 4.1% (средний темп роста за 2010–2012 гг.) до 0.6%. В текущем году инфляция достигла пикового значения 17.5% в годовом исчислении (март 2015 г.), а спад в экономике в первом полугодии уже превысил 3%. Прогнозы экспертов относительно глубины спада продолжающейся рецессии в 2015 г. колеблются от 3 до 7%, а инфляция к концу года прогнозируются на уровне 12–16%.

В настоящей работе мы предлагаем краткосрочную математическую модель экономической динамики в условиях высокой инфляции (от 10 до 30% в год) и нестабильного развития. С помощью этой модели прогнозируются темпы инфляции и экономического роста (спада) для России на период с 2015 по 2018 гг. Предполагается, что в ближайшие год-два не следует ожидать заметных импульсов со стороны инновационного предложения, способных сгенерировать эндогенные факторы роста российской экономики. В этих условиях основным источником для финансирования дефицита государственного бюджета становится денежная эмиссия. Доход, получаемый государством от денежной эмиссии, называется сеньоражем. В свою очередь, эмиссионное покрытие дефицита госбюджета служит основным источником роста инфляции.

Поскольку главным фактором повышения инфляции является рост денежной массы, ключевую роль играет условие равновесия на рынке денег, которое в общем виде обычно записывается так [1, с. 629]:

$$\left(\frac{M}{P}\right)^S = \left(\frac{M}{P}\right)^D = L(i, Y), \tag{1}$$

где M – денежная база; P – уровень цен в экономике; i – номинальная процентная ставка; Y – реальный доход (ВВП); $L(i, Y)$ – функция спроса на реальные денежные остатки; верхние индексы S и D означают предложение (supply) и спрос (demand). В соответствии с тождеством Фишера [1, с. 630] номинальная процентная ставка (i) определяется через реальную процентную ставку (r) и ожидаемую инфляцию (π^e):

$$i = r + \pi^e; \quad \pi^e = \frac{\dot{P}^e}{P^e}. \tag{2}$$

При разработке конкретной модели спроса на деньги в условиях высокой инфляции обычно исходят из классической функции спроса на деньги, предложенной Ф. Каганом [2] для описания про-

Институт математических исследований сложных систем Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
Центр фундаментальных исследований процессов развития экономики России Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета
E-mail: askarakaev@mail.ru

цессов гиперинфляции, когда уровень цен в течение месяца повышается в среднем на 50% и более:

$$\left(\frac{M}{P}\right)^{\mathrm{D}} = \exp\left(-\alpha\pi^{e}\right), \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Здесь α – коэффициент эластичности спроса на деньги по темпу инфляции. Функция Кагана (3) показывает очень быстрое угасание спроса на денежные активы по мере роста инфляционных ожиданий (π^{e}), что действительно характерно для случая гиперинфляции. Весьма удачным оказалось также предположение Кагана о том, что коррекцию ожиданий целесообразно строить в соответствии с механизмом “адаптивных ожиданий” [3, с. 158]:

$$\dot{\pi}^{e} = \beta(\pi - \pi^{e}), \tag{4}$$

где $\pi = \dot{P}/P$ – фактические темпы инфляции; β – параметр, характеризующий скорость, с которой экономические субъекты пересматривают свои ожидания в соответствии с реальным обесценением денег, причем $\beta > 0$. Предполагается также, что темп прироста денежной массы постоянен, т.е.

$$\mu = \frac{\dot{M}}{M} = \theta = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Модель Кагана (3)–(5) имеет простое и изящное аналитическое решение [3, с. 158]:

$$\pi(t) = \theta + (\pi_0 - \theta)\exp\left(-\frac{\beta t}{1 - \alpha\beta}\right). \tag{6}$$

Для экономики, подверженной гиперинфляции, можно полагать, что $\pi_0 > \theta$. Если агенты меняют свои ожидания рациональным образом, тогда $\alpha\beta < 1$ и при $t \to +\infty$ $\pi \to \theta$, что согласуется с выводами классической количественной теории денег [3, с. 159]: в состоянии равновесия $\pi = \mu = \theta$. Если же агенты резко меняют свои ожидания, тогда $\alpha\beta > 1$ и $\pi \to +\infty$ при $t \to +\infty$, т.е. экономика не сможет прийти в равновесное состояние. Модель Кагана, благодаря простоте и адекватности, стала наиболее популярной демонстрационной моделью и поэтому встречается во всех учебниках по макроэкономике (см., например, [1, с. 684; 3, с. 157–159; 4, с. 194]).

В качестве единственного фактора спроса в модели Кагана (3) выступают инфляционные ожидания (π^{e}). Поскольку при гиперинфляции $\pi^{e} \gg r$, последним (r) пренебрегают. В модели также отсутствует выпуск (Y), предполагается, что экономический рост (спад) отсутствует. Очевидно, что при высокой инфляции ($10\% < \pi < 30\%$), когда r и π^{e} сравнимы по величине, в функции спроса (3) необходимо учитывать и реальную процентную ставку. К тому же экономика претерпевает значительные изменения – спады или подъемы. Вдобавок, Каган принял темпы роста денежной массы (μ) постоянными, что неприемлемо практически, поскольку именно μ является управляющим параметром, требующим гибкой политики регулирования со стороны Центрального банка Российской Федерации в целях стабилизации инфляции. Поэтому неудивительно, что попытки применения модели Кагана (3)–(5) к российской экономике не дали полезных результатов [3, 4].

В [4, с. 194] применительно к российской экономике, развивающейся в условиях высокой инфляции, предлагалось использовать следующую функцию спроса на деньги:

$$\left(\frac{M}{P}\right)^{\mathrm{D}} = \frac{a}{b + c(\pi^{e})^{2}}, \tag{7}$$

где a, b и c – постоянные параметры. Данная функция сокращается значительно медленнее, нежели экспоненциальная функция спроса в модели Кагана (3). Однако и такая функция спроса не дает удовлетворительного описания динамики инфляции в условиях нестабильной экономики.

Недостатки модели Кагана частично были устранены в модели Бруно–Фишера [3, с. 159–164], которая включает динамику ВВП, а также эмиссионное финансирование дефицита государственного бюджета. Функция спроса на деньги в этой модели выражает удельный спрос в долях ВВП (Y):

$$\left(\frac{M}{PY}\right)^{\mathrm{D}} = \exp(-\alpha\pi^{e}), \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

Предполагается, что выпуск (Y) растет постоянным темпом, т.е. $q_Y = \dot{Y}/Y = \mathrm{const}$, что характерно для стабильной экономики, адаптировавшейся к гиперинфляции, а это редчайший случай. Далее предполагается, что весь дефицит госбюджета (d в долях ВВП) финансируется за счет эмиссии денег:

$$\frac{\dot{M}}{PY} = d = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Ожидания в модели Бруно–Фишера, как и в модели Кагана (4), носят адаптивный характер. Модель Бруно–Фишера (8)–(9) уже не дает простого явного решения и требует анализа с использованием численных методов. Модель хорошо описывает случай гиперинфляции, но так же, как и модель Кагана, не дает удовлетворительного результата для случая высокой инфляции и нестабильного развития.

Если рассматривать величину ожидаемой инфляции как случайную величину, каковой она и является на практике, то мы видим, что в указанных моделях использовались экспоненциальный закон распределения плотности вероятности (3) и (8) и закон распределения Коши (7), которые имеют относительно быстро убывающие “хвосты”, что подтверждается в случае гиперинфляции. Это означает, что “хвостами” распределений можно пренебречь. Однако в случае высокой инфляции имеют место нестабильность и существенная вероятность всплеска ожидаемой инфляции, с которой надо считаться и учитывать в практических расчетах. Следовательно, в таких случаях необходимо использовать распределения с толстыми хвостами. Именно это и было впервые предложено в докладе [5], который получил одобрение видных ученых-экономистов и математиков. Для описания функции спроса предлагается использовать степенную функцию:

$$\left(\frac{M}{PY}\right)^{\mathrm{D}} = k(r+\pi^e)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad k = \mathrm{const}, \tag{10}$$

т.е. функцию распределения типа Парето [6, с. 7].

Дополнительно к функции спроса (10) примем ключевые предпосылки моделей Кагана и Бруно–Фишера. Следуя Кагану, будем полагать, что имеет место адаптивный механизм пересмотра ожиданий (4). Вслед за Бруно и Фишером примем, что весь дефицит госбюджета финансируется за счет эмиссии денег (9). Однако мы не ограничиваем его (d) постоянной величиной, полагая, что правительство будет стремиться к постепенному уменьшению дефицита, вплоть до перехода к бездефицитному бюджету в среднесрочной перспективе. Мы также будем рассматривать реальную динамику ВВП $q_Y = \dot{Y}/Y \neq \mathrm{const}$ и реальные стратегии изменения ключевой ставки процента r и темпов регулирования денежной массы $\mu = \dot{M}/M \neq \mathrm{const}$.

Приступим к отысканию решения модели. Прологарифмируем обе части уравнения (10):

$$\ln M - \ln P - \ln Y = \psi - \alpha \ln(r+\pi^e), \tag{11}$$

где $\psi = \ln k$, $k = e^{\psi}$. А теперь продифференцируем обе части полученного уравнения (11):

$$\mu - \pi - q_Y = -\alpha \frac{\dot{r} + \dot{\pi}^e}{r+\pi^e}. \tag{12}$$

Поскольку в ретроспективном анализе можно полагать $\pi^e = \pi$, то уравнения (11) и (12) могут быть использованы для оценки величин параметров k и α. Уравнение эмиссионного финансирования дефицита госбюджета (9), используя (10), преобразуем к виду

$$\frac{\dot{M}}{PY} = \frac{\dot{M}}{M} \cdot \frac{M}{PY} = \mu k (r+\pi^e)^{-\alpha} = d. \tag{13}$$

Взяв логарифмическую производную от обеих частей полученного уравнения, будем иметь

$$-\alpha \frac{\dot{r} + \dot{\pi}^e}{r+\pi^e} = \frac{\dot{d}}{d} - \frac{\dot{\mu}}{\mu}. \tag{14}$$

Объединив уравнения (12) и (14), получаем важное уравнение

$$\pi + q_Y = \mu + \frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{d}}{d}, \tag{15}$$

которое показывает, что нестабильная неинновационная экономика в условиях высокой инфляции полностью определяется двумя факторами: темпами роста денежной массы (μ) и дефицита госбюджета (d).

Итак, для разделения темпов инфляции (π) и экономического роста (спада, q_Y) – двух интересующих нас переменных, необходимо получить еще одно уравнение. С этой целью мы можем воспользоваться уравнением предложения Лукаса [1, с. 365], которое описывает отклонения выпуска ($\overline{Y}$), вызванные неожиданным отклонением уровня цен (P) в отсутствие шоков предложения:

$$\ln Y - \ln \overline{Y} = b(\ln P - \ln P^e). \tag{16}$$

Продифференцировав обе части данного уравнения, получаем

$$q_Y = q_{\overline{Y}} + b(\pi - \pi^e). \tag{17}$$

Пользуясь уравнением пересмотра ожиданий (4), отсюда получаем

$$q_Y = q_{\overline{Y}} + \rho \dot{\pi}^e, \quad \rho = \frac{b}{\beta}. \tag{18}$$

А теперь обратимся к уравнению (13), откуда следует, что

$$\pi^e = \left(\frac{k\mu}{d}\right)^{1/\alpha} - r. \tag{19}$$

Следовательно,

$$\dot{\pi}^e = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{k\mu}{d}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{d}}{d}\right) - \dot{r}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (18), получаем окончательное уравнение для расчета динамики темпов экономического роста (спада):

$$q_Y = q_{\overline{Y}} + \rho\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{k\mu}{d}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{d}}{d}\right) - \dot{r}\right]. \tag{21}$$

Данное уравнение совместно с уравнением (15) уже позволяет определить обе интересующие нас переменные. Действительно, рассчитав вначале, по формуле (21), прогнозную динамику темпов экономического роста (q_Y), затем легко можно рассчитать и прогнозные темпы инфляции (π) по формуле (15), подставляя туда полученные значения q_Y.

Для прогнозных расчетов по формуле (21) требуется задать сценарии трех ключевых переменных: r, μ и d. Сценарий снижения ключевой ставки процента, после резкого повышения в конце 2014 г. до 17%, сформулирован Центробанком России: плавное снижение до равновесного уровня 6% к концу 2017 г. Мы описали этот сценарий логистической функцией

$$\tilde{r}(t) = \frac{A}{1+fe^{-ht}} + \Delta, \quad A = 3.87; \qquad f = 33.24; \quad h = 1.24; \quad \Delta = 0.055, \tag{22}$$

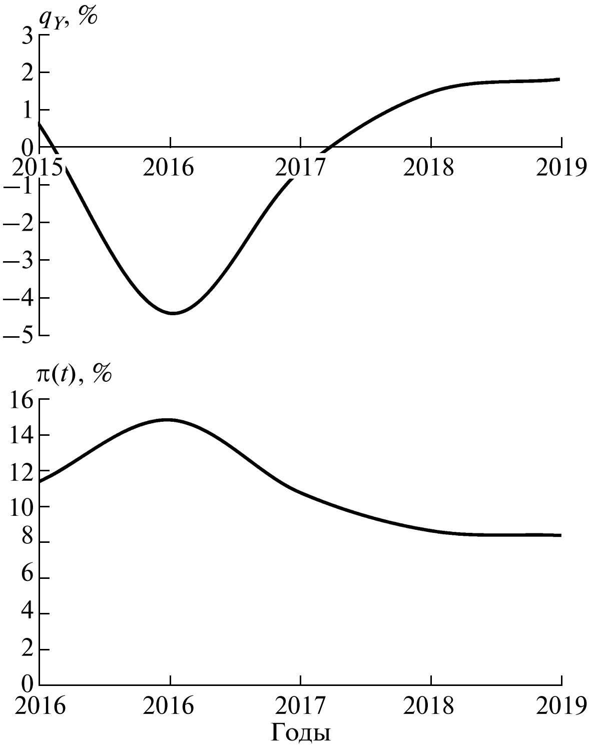

Рис. 1. Прогнозная динамика темпов экономического роста (q_Y) и инфляции (π) для экономики России в 2015–2019 гг.

в периоде 2010–2014 гг. и полиномом второй степени

$$\tilde{r}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (a_0 = 0.17; a_1 = -0.0185; a_2 = 0.0012) \tag{23}$$

в прогнозном периоде 2015–2018 гг. Для темпов роста денежной массы мы заложили линейный сценарий роста:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1(t - T_0), \tag{24}$$

где μ_0 – темпы прироста денежной массы, сложившиеся к началу 2015 г., следовательно $T_0 = 2015$ г. Здесь $\mu_0 = 0.018$; $\mu_1 = 0.00013$. Что же касается динамики дефицита госбюджета, при численном прогнозировании мы приняли его постоянным и равным 2.6%, предполагаемому среднему значению за 2014–2018 гг.

Результаты прогнозных расчетов динамики темпов инфляции и темпов экономического роста (спада) представлены на рис. 1. Как видно из рисунка, глубина рецессии составит –4.4% и приходится она на конец 2015 года. Затем начнется отскок от дна спада, который перерастет в подъем, достигающий темпов роста примерно в 1.5% в 2017 г. и 1.8% в 2018 г. Но в 2016 г. еще будет наблюдаться спад на 0.7%. Инфляция к концу 2015 г. составит 14.8% и продолжит снижаться до уровня 10.8% к концу 2016 г. и 8% к началу 2018 г. Значения ключевых параметров α и k (10) были оценены с помощью уравнений (11) и (12): $\alpha = 0,33$; $k = 0,25$. Затем были оценены потенциальные равновесные темпы роста российской экономики $q_{\bar{Y}}$ и параметр ρ с помощью уравнения (18), где в ретроспективном периоде используются фактические данные для $\pi = \pi^e$: $q_{\bar{Y}} = 0.98\%$ для 2014–2015 гг.; $\rho = -1.4$. Здесь следует отметить, что в работе [7, с. 27] было проведено детальное исследование и показано, что потенциальные (структурные) темпы роста российской экономики неуклонно снижались с 4.3% в 2009 г. до 1–2% в 2014 г. Как видим, полученная нами оценка $q_{\bar{Y}} \cong 1\%$ для 2014–2015 гг. согласуется с результатами работы [7].

ВЫВОДЫ

1. В условиях неинновационной экономики, как следует из уравнения (15), темпы инфляции и экономического роста (спада) определяются исключительно темпами роста денежной массы и дефицитом госбюджета. Поэтому Правительству РФ следует принять все меры для снижения дефицита госбюджета, чтобы добиться снижения инфляции и оживления экономического роста.

2. Из уравнения экономического роста (21) в условиях высокой инфляции и дефицита госбюджета следует, что определенное увеличение темпов роста денежной массы в краткосрочном периоде способствует повышению темпов экономического роста, что согласуется с выводами Нобелевского лауреата Р. Лукаса.

3. Из уравнения экономического роста (21) также следует, что уменьшение темпов роста денежной массы в условиях высокой инфляции и нестабильности приводит к заметному снижению темпов экономического роста. Это свидетельствует о дефиците ликвидности в российской экономике и о ее низкой монетизации.

Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда № 14–28–00065.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ромер Д.* Высшая макроэкономика. М.: ГУ ВШЭ, 2014.
2. *Cagan Ph.* Studies in the Quantity Theory of Money. Chicago: Univ. Chicago Press, 1956. P. 25–117.
3. *Туманова Е.А., Шагас Н.Л.* Макроэкономика. М.: Инфра-М, 2004.
4. *Смирнов А.Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию. М.: ГУ ВШЭ, 2000.
5. *Акаев А.А.* Доклад на III Международ. симп. “Многофазные системы”. М.: Ин-т океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 2015.
6. *Петров В.М., Яблонский А.И.* Математика социального неравенства. М.: Либроком, 2013.
7. *Синельников-Мурылев С., Дробышевский С., Казакова М.* // Экон. политика. 2014. № 5. С. 7–37.
8. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Академия, 2003.