

# ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ДОЛГОСРОЧНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ.

**А.А. Акаев, иностранный член РАН,**

**М.М. Галилеев,**

**А.И. Михайлушкин**

В работе [1] было получено общее дифференциальное уравнение макроэкономической динамики, описывающее совместное взаимодействие долгосрочного экономического роста и циклических колебаний деловой активности в свободной рыночной экономической системе:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \left\{ \lambda + \kappa - \lambda(1-s) \frac{1}{\gamma^*} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} - \kappa \lambda \nu \left[ 1 - \frac{4}{3} \chi \left( \nu \frac{dY}{dt} \right)^2 \right] \right\} \frac{dY}{dt} + \lambda \left[ \kappa - s(1-s) \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} \right] Y +$$

$$+ \lambda(1-s) \left( \mu - \kappa \frac{a}{h} \right) K \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} - \kappa \lambda(1-s) \frac{b}{h} L \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} = \lambda \frac{dA}{dt} + \kappa \lambda A. \quad (1)$$

Здесь  $Y(t)$  - текущий объем выпуска продукции (текущий уровень ВВП);  $\bar{Y} = F(K, L)$  - уровень выпуска, соответствующего траектории долгосрочного роста;  $K$  - капитал;  $L$  - труд;  $\lambda$  - скорость реакции запаздывания предложения от спроса;  $\kappa$  - скорость реакции запаздывания фактических индуцированных капиталовложений от решения об инвестициях;  $s$  - коэффициент сбережений;  $\nu$  - мощность акселератора;  $\mu$  - коэффициент выбытия капитала;  $a, b, h$  -

постоянные коэффициенты в уравнении Эйлера для производственной функции  $aK \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} + bL \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} = h\bar{Y}$ ;  $\gamma^* = \gamma \frac{Y_F}{L^*}$  – модифицированный параметр Оукена ( $\gamma$ )  $Y_F$ - национальный доход при полной занятости;  $A$  - независимые от дохода ( $Y$ ) расходы, как на капиталовложения, так и на потребление.

Уравнение (1) включает в себя нелинейный акселератор инвестиций равный  $\frac{4}{3}k\lambda(v \frac{dY}{dt})^3$  (при  $\chi = 1$ ), который обеспечивает поддержание в данной экономической системе незатухающих циклических колебаний. Экономическая система с указанным нелинейным акселератором является классической автоколебательной системой, в которой роль механизма положительной обратной связи играет нелинейный акселератор, а в качестве коэффициента усиления служит мощность акселератора  $v$ . Если коэффициент усиления  $v$  достаточно велик ( $v > 1,05$ ), то в системе возникает самоподдерживающийся колебательный процесс, характеристики которого определяются внутренними параметрами системы [2]. Таким образом, в точке  $v=1,05$  в системе происходит бифуркация рождения цикла. При выводе уравнения (1) была также учтена циклическая безработица, которая возникает в периоды спадов, что позволяет рассматривать реальную экономику с неполной занятостью. Как известно, колебания уровня безработицы связаны с колебаниями фактического выпуска согласно закону А. Оукена.

В общем уравнении макроэкономической динамики (1) присутствуют две переменные, характеризующие выпуск продукции: быстроменяющаяся переменная  $Y(t)$ , которая содержит в себе

циклические колебания  $y=Y - \bar{Y}$  и медленноменяющаяся  $\bar{Y}(t)$  представляющая трендовую кривую долгосрочного роста. Для получения приближенных решений подобных нелинейных уравнений имеется весьма эффективный асимптотический метод, называемый методом усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского (метод КБМ), который позволяет, прежде всего разделить быстрые и медленные движения [3, 4]. Действительно, можно сначала провести усреднение быстроменяющейся переменной  $y(t)=Y - \bar{Y}$  и получить усеченное описание системы, учитывающее только ее осредненную эволюцию, представляющую долговременный тренд, описываемый  $\bar{Y}(t)$ . Для того, чтобы практически реализовать данную схему разделения быстрых и медленных движений необходимо, прежде всего выделить трендовую составляющую в правой части уравнения (1), представляя независимые (автономные) инвестиции  $A(t)$  в виде  $A(t) = \bar{A}(t) + \varphi^*(t)$ , где  $\bar{A}(t)$  - трендовая составляющая (например,  $\bar{A}(t) = A_0 e^{gt}$ ), а  $\varphi^*(t)$ - квазипериодическая функция, колеблющаяся вокруг трендовой составляющей. Следовательно, правая часть уравнения (1) примет вид:

$$\lambda\left(\frac{dA}{dt} + \kappa A\right) = \lambda\left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \kappa \bar{A}\right) + \lambda\left(\frac{d\varphi^*}{dt} + \kappa \varphi^*\right). \quad (2)$$

Первая часть этого выражения определяет медленные долгосрочные движения решения уравнения (1), т.е. трендовую кривую, а вторая – определяет циклические колебания вокруг долгосрочной трендовой кривой. Нелинейное дифференциальное уравнение,

описывающее циклические колебания деловой активности вокруг трендовой кривой роста, имеет вид [5]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left[ \sigma_0 - \frac{4}{3} \lambda \kappa \nu^3 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{s(1-s)}{\kappa} i \right] y = \lambda \left( \frac{d\varphi^*}{dt} + \kappa \varphi^* \right), \quad (3)$$

где  $\sigma_0 = - \left[ \lambda + \kappa - \lambda \kappa \nu - \lambda(1-s) \frac{\beta}{\gamma} \right]$ ,  $\omega_0^2 = \lambda \kappa$ ,  $y = Y - \bar{Y}$ ,

$$y|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

$\beta$ - эластичность выпуска по труду;  $i$  - норма процента. Для дальнейшего анализа примем следующие типичные численные значения параметров:

$$\lambda = 4; \kappa = 1; s = 0,25; i = 0,1; \beta = \frac{2}{3}; \gamma = 2,5.$$

Мощность  $\nu$  акселератора является основным управляющим параметром и оказывает существенное влияние на динамику исследуемой системы, поэтому данный параметр изменяется в определенных пределах.

Дифференциальное уравнение, описывающее траекторию экономического роста, имеет вид [5]:

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} - \bar{\sigma}_0 \frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{\omega}_0^2 \bar{Y} = \lambda \left( \frac{d\bar{A}}{dt} + \kappa \bar{A} \right), \quad (4)$$

где  $\bar{\sigma}_0 = \lambda + \kappa - \lambda \kappa \nu$ ;  $\bar{\omega}_0^2 = \lambda s \kappa$ ;  $\bar{Y}(0)=0$ ;  $\left. \frac{d\bar{Y}}{dt} \right|_{t=0} = 0$ .

Линейное дифференциальное уравнение (4) с постоянными коэффициентами может быть проинтегрировано в аналитической

форме. Для нелинейного дифференциального уравнения (3), в случае слабой нелинейности акселератора (при небольших значениях мощности акселератора) можно также получить приближенное решение в явной аналитической форме с помощью метода усреднения КБМ. Эти случаи подробно рассмотрены в работе [6].

В работе [2] дан качественный анализ решений дифференциальных уравнений (3) и (4), описывающих циклические колебания деловой активности и экономический рост, исследована устойчивость системы, рассчитана точка бифуркации, где система теряет устойчивость и становится восприимчивой к структурным изменениям и инновациям. Показано, что следствием бифуркации является возникновение в системе самоподдерживаемых незатухающих автоколебаний. Именно в условиях неравновесия происходит смена уровней равновесия, что вызывает возрастающий экономический рост.

В общем случае, когда коэффициенты дифференциальных уравнений (3) и (4) переменные (медленноменяющиеся), а нелинейность акселератора существенна и также изменяется во времени, тогда для решения указанных уравнений необходимо воспользоваться численными методами и осуществлять компьютерное моделирование.

В настоящей работе представлены результаты компьютерного моделирования макроэкономической динамики путем численного решения дифференциальных уравнений, описывающих трендовую траекторию экономического развития (4) и циклические колебания (3), с последующей суперпозицией полученных решений.

Исследована устойчивость экономической системы. Проводится верификация математической модели (3) – (4) на примере экономического развития США в период с 1970 по 2006 гг. Затем модель используется для прогнозирования экономического развития России до 2020 г. в соответствии с инновационной стратегией правительства Российской Федерации.

В целях компьютерного моделирования целесообразно принять

$$\bar{A}(t) = A_0 e^{gt}; \varphi(t) = q_1 \sin v_1 t + q_2 \sin v_2 t. \quad (5)$$

Первое выражение означает, что трендовая кривая движения независимых инвестиций растет с постоянным ежегодным темпом, равным  $g$ . Это часто используемый модельный случай. Второе выражение означает, что циклические отклонения инвестиций от трендовой кривой представляют суперпозицию кратко- и среднесрочных циклов, вызывающих соответствующие циклы Китчина и Жюгляра. Поскольку продолжительность цикла Китчина составляет 3-4 года, а Жюгляра – 8-11 лет, для численного моделирования можно положить:

$$v_1 = 2(T_1 = \pi \approx 3,14 \text{ г.}); v_2 = \frac{2}{3}(T_2 = 3\pi \approx 9,4 \text{ г.}).$$

Из статистических данных по экономике США известно также, что  $\frac{q_2}{q_1} \approx 2$  [7].

Выше уже было отмечено, что мощность акселератора является управляющим параметром и оказывает решающее влияние на динамику экономической системы, на формирование траектории

долгосрочного экономического роста. Поскольку мощность акселератора пропорциональна предпринимательской активности, а последняя определяется экономической конъюнктурой, в первом приближении можно полагать, что она меняется медленно, по синусоиде, синхронно с большим циклом Кондратьева, т.е.:

$$v = v_0 + \frac{v_1}{2} \cos \psi t, \quad v \geq 0. \quad (6)$$

Так как продолжительность цикла Кондратьева составляет 40-50 лет, то можно принять  $\psi = \frac{1}{7} (T_3 = 14\pi \approx 44\text{г.})$  Диапазон практического изменения мощности акселератора  $0 < v < 2$  [2], поэтому целесообразно, чтобы  $v_0 \geq 0,8$ .

Результаты компьютерного моделирования представлены на рис.1. Как видно из рис. 1 при определенных значениях параметров ( $v_0 = 1, v_1 = 1,05$ ) происходит потеря устойчивости системы, экономика испытывает кризис, впадая в глубокую рецессию ( $v_0 = 1, v_1 = 1,1$ ), что подтверждает результаты качественного анализа решений [5]. Важно также отметить, что потеря устойчивости связана с трендовой кривой, но не циклическими колебаниями. Это соответствует утверждению И.Шумпетера о том, что равновесная траектория ступенчата, но остаток после ее вычитания описывается волной [7]. Графики движения ВВП, представленные на рис.1 говорят о том, что искомая математическая модель вполне адекватно описывает реальный процесс экономического развития.

Насколько точна предлагаемая математическая модель макроэкономической динамики? Чтобы ответить на этот вопрос была проведена верификация модели на примере развития экономики

США в период с 1970 по 2006 гг. Статистические данные по движению ВВП ( $Y_{\text{факт}}$ ) для США в указанный период [8] представлены на рис. 2. Для численного моделирования выделяется тренд движения инвестиций, описываемый в виде логистической функции, и циклические отклонения от этого тренда, которые и составляют правые части дифференциальных уравнений (3) и (4) рассматриваемой математической модели макроэкономической динамики. Численные решения дифференциальных уравнений (3) и (4), с соответствующими правыми частями и заданными начальными условиями (3) и (4), даны на рис. 2. Сравнение фактической траектории движения ВВП США в период с 1970 по 2006 гг. с расчетной, полученной по предполагаемой математической модели, представленной на рис. 2, показывает хорошее совпадение. Максимальное отклонение не превышает 5%. Следовательно математическая модель, учитывающая влияние циклических колебаний на формирование долговременной траектории экономического роста дает удовлетворительные результаты.



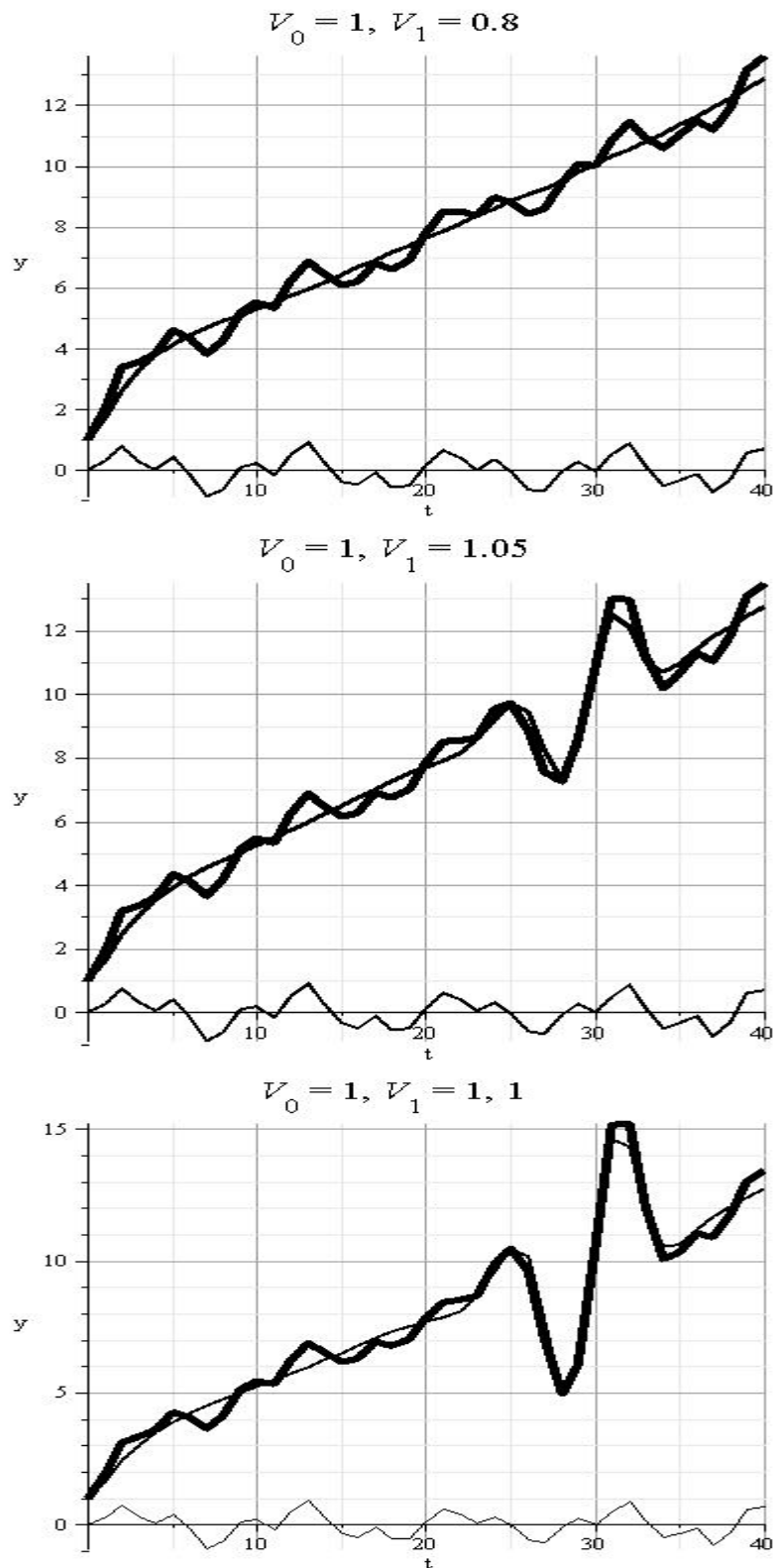


Рис. 1. Численные решения уравнений макроэкономической динамики: а) тренд и циклические колебания представлены линиями средней толщины; б) движение выпуска дано толстыми линиями.

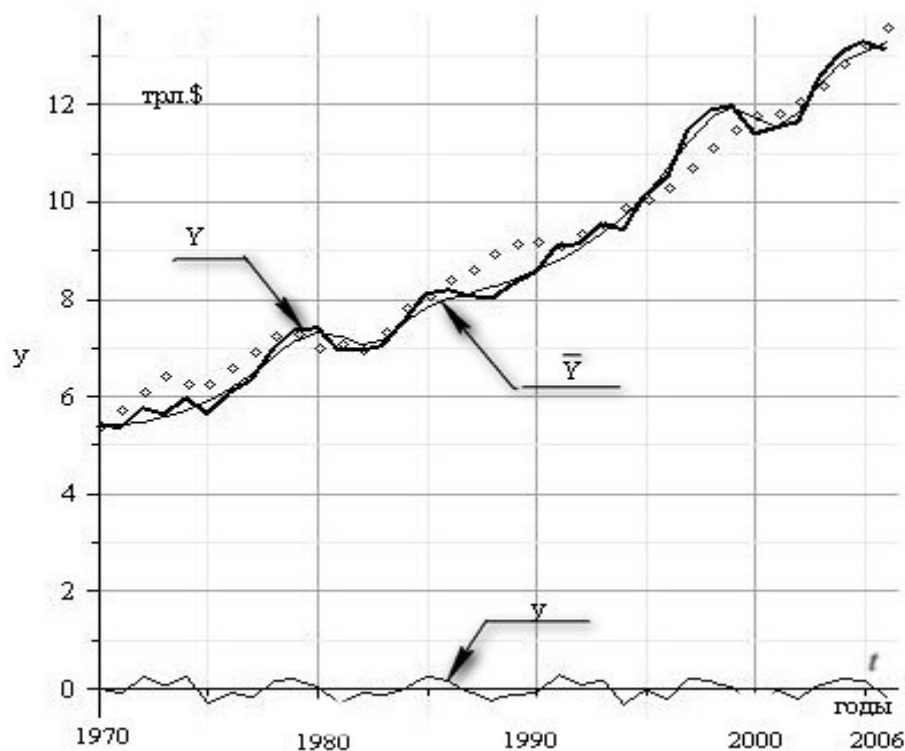


Рис. 2. Верификация модели с реальной экономикой на примере США

( $\diamond$ )- фактические данные, ( $\psi = \frac{1}{7}$ ).

В заключение используем модель для прогнозирования динамики развития экономики России до 2020 г., пользуясь данными программы инновационной стратегии, разработанной правительством Российской Федерации [9]. График движения потенциального ВВП по данным программы представлен на рис. 3. Из распределения инвестиций выделяется трендовая и циклическая составляющие, которые и используются в качестве правых частей уравнений (4) и (3) соответственно. График движения ВВП России до 2020 г., рассчитанный по модели представлен на рис. 3. Результаты несколько отличаются. Модель показывает, что для достижения поставленной цели требуются более высокие темпы роста на первой половине

планируемого срока. Это больше соответствует логике долгосрочного инновационного развития.

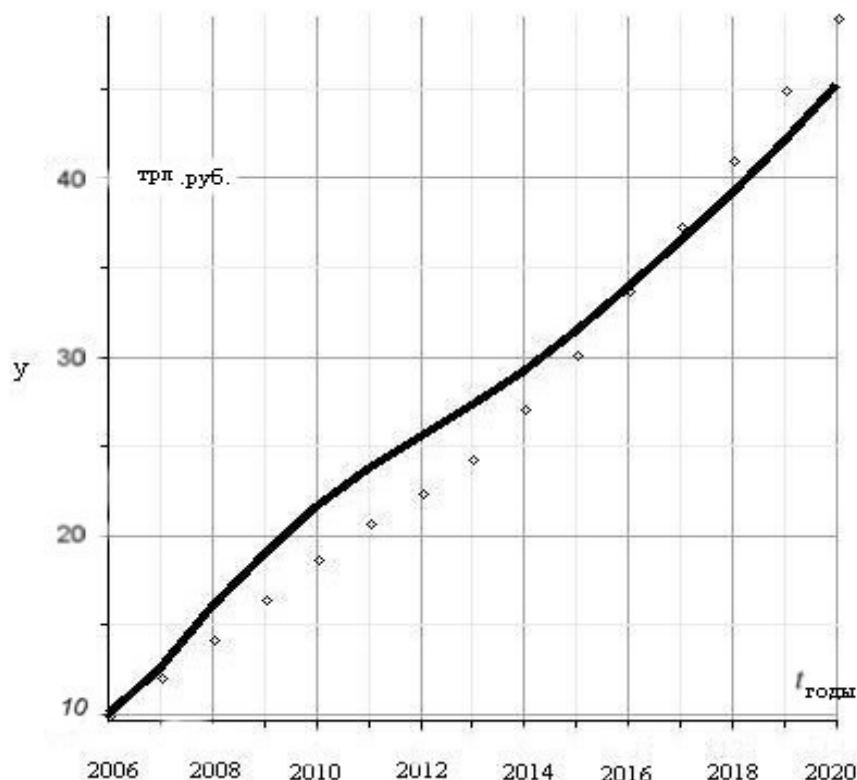


Рис. 3. Прогноз инновационного экономического развития России до 2020 г. (в ценах 2000 г.).

(◇) – движение ВВП по стратегии правительства, (-) - расчетная траектория движения ВВП.

### Выводы

1. Верификация математической модели (1) – (4) для описания долговременной макроэкономической динамики на примере экономического развития США показывает, что данная модель достаточно точно, как в количественном, так и в качественном аспектах, описывает реальный процесс экономического роста с

учетом кратко- и среднесрочных циклов Китчина и Жюгляра. Максимальное отклонение расчетного значения ВВП от фактического не превышает 5%.

2. Модель может быть использована для анализа влияния структурных параметров экономической системы на характер ее долговременного развития, выявления критических значений параметров, когда система теряет устойчивость и впадает в кризисную рецессию.

3. Модель позволяет делать долгосрочный прогноз экономического развития, что проиллюстрировано на примере инновационной стратегии развития России до 2020 г.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акаев А.А.* // ДАН, 2007, том 417, № 4, с. 439-441.
2. *Акаев А.А.* // ДАН, 2008, том 421, № 1, с. 1-5.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
4. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: «Наукова Думка», 1971. – 440 с.
5. *Акаев А.А.* // ДАН, 2007, том 417, № 5, с. 609-612.
6. *Акаев А.А.* // Экономика и математические методы, 2008, том 44, № 3, с. 62-78.
7. *Полетаев А.В., Савельева И.М.* Циклы Кондратьева и развитие капитализма. – М.: Наука, 1993 г.
8. Organization for economic co-operation and development  
OECD.StatExtracts.<http://stats.oecd.org/wbos/Index.aspx>
9. Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации до 2020 года, Министерство экономического развития и торговли РФ, август 2009года  
<http://www.economy.gov.ru/wps/wcm/myconnect/economylib/mert/welcome/pressservice/eventscyronicle/doc1217949648141>